Autores: Saucedo, Gladis; Carbó, Ana Laura y Mántica Ana María

Institución: Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.

Dirección electrónica:gsaucedo@eis.unl.edu.ar , analauracarbo@hotmail.com

amantica@fhuc.unl.edu.ar

Nivel educativo: EGB_2 EGB_3

Palabras Claves: volumen – sólidos- medir – dificultades –

Volumen, ¿qué se necesita conocer para enseñarlo ?

Fundamentación

Todos los objetos de nuestro entorno tienen volumen y hemos aprendido, intuitivamente o no, unos más, unos menos, a determinar los espacios que ocupan los mismos o sea a manejar el volumen de los cuerpos que nos rodean. Estos objetos tienen distintas propiedades, algunas de ellas detectables por los sentidos como el color, el olor, la textura, la forma, etc. y otras se pueden medir, como la longitud, superficie, volumen, etc.

Al revisar el tratamiento escolar que se da a las magnitudes nos encontramos que el volumen parece ser una de la más descuidadas en cuanto a las actividades que se realizan ,ya que no sólo se dejan de lado algunas de sus variadas relaciones con otros temas, sino que muchas veces se confunde la propiedad que estamos midiendo (volumen) con su medida. Y esto se debe en parte a la influencia que tiene el Sistema Métrico Decimal (SMD) en el currículo escolar, ya que medir se lo asocia al trabajo con el SMD, dando por supuesto que ya se sabe qué es el volumen.

Todas las cosas que nos rodean, muebles, plantas, máquinas, etc. tienen una superficie y ocupan un determinado espacio, tienen una extensión. Algunos autores como Castelnuovo (1963) así como utilizan indistintamente superficie o área también lo hacen con los términos extensión y volumen. La autora citada anteriormente considera que es más simple comprender el significado de superficie de un sólido que el de extensión del mismo y cita algunos ejemplos donde relaciona ambos conceptos, por ejemplo:

✎ Cuando un globo se desinfla el espacio que ocupaba ya no es el mismo mientras que su superficie sigue siendo la misma.

✎ Cuando se ejecuta un bandoneón el espacio que ocupa va cambiando continuamente mientras que su superficie permanece invariante.

✎ Si llenamos completamente un recipiente cúbico y luego lo trasvasamos a uno cilíndrico, llenándose éste completamente, decimos que ambos recipientes tienen la misma extensión o volumen.

✎ Si a una bolita de plastilina la aplanamos, la bolita y la nueva figura tienen el mismo volumen.

✎ Si consideramos dos cuerpos formados por 4 cubos apilados de diferentes formas, el espacio ocupado será el mismo, ambos tendrán igual volumen, pero la superficie expuesta puede ser distinta.

De acuerdo a estos ejemplos podemos decir que existen sólidos que teniendo la misma superficie no ocupan el mismo espacio, tienen distinto volumen. Y que hay sólidos que teniendo el mismo volumen presentan superficies distintas.

El concepto de volumen tiene importancia en nuestra vida diaria porque nosotros nos movemos en un mundo tridimensional y en más de una ocasión necesitamos medir el volumen de determinados cuerpos.

Para el tratamiento escolar del volumen es necesario conocer algunas cuestiones para poder lograr una buena enseñanza, como ser:

- ✓ su concepto desde el punto de vista matemático y el de medida
- ✓ las dificultades que presenta su aprendizaje
- ✓ y algunas propuestas de enseñanza, entre otras cosas.

En esta ponencia abordaremos los dos primeros ítem, que servirán de marco teórico para la elaboración de una secuencia didáctica sobre volumen

Desarrollo y Análisis

➢ *El concepto*

Sánchez Mármol (1947, p.1077) expresa que “siendo los cuerpos porciones del espacio limitadas por superficies cerradas, intuitivamente concebimos que dos cuerpos, teniendo formas geométricas distintas, pueden encerrar en su contorno porciones iguales en el espacio; tener igual extensión. A estos cuerpos se los denomina equivalentes”. Luego dice que al comparar la extensión de las figuras en el espacio se pueden definir para ellas las operaciones de adición y sustracción así como establecer las relaciones de igualdad y desigualdad; “resultando ser los sólidos una nueva especie de magnitudes homogéneas” Luego define poliedros equicompuestos, equivalentes y volumen como: “La medida de un cuerpo con relación a la unidad elegida se denomina volumen del cuerpo. La unidad elegida es el volumen del cubo que tiene por arista la unidad de longitud. Es evidente que: Dos cuerpos iguales o equicompuestos o equivalentes, tienen igual volumen.

La equivalencia y la equicomposición entre poliedros y la equivalencia entre algunos de éstos con los cuerpos limitados por superficies curvas, permite la determinación de los volúmenes de aquellos sólidos que son objeto de estudio en la geometría elemental” (p.1078)

Analizando diferentes textos hemos observado que la mayoría cuando dan la definición de volumen lo hacen referido a poliedros, previa consideración de definir suma de poliedros y la descomposición de un poliedro en cuerpos piramidales.

Por ejemplo

- “Existe una única función v que asigna a cada cuerpo poliédrico simple P un número real positivo, llamado volumen de P, tal que:

A) cuerpos poliédricos congruentes, tienen igual volumen

B) si un cuerpo poliédrico es suma de otros, su volumen es suma de los volúmenes de los mismos
C) Si C es un cubo de lado de longitud 1, el volumen de C es igual a 1” (Ferrari 1991, p. 102)

- “Elegido en cubo unidad: a cada poliedro y a todos sus congruentes corresponde un número que se llama volumen. Si un poliedro es suma de dos o más, el volumen es igual a la suma de los volúmenes de aquellos. A poliedros ordenados de mayor a menor corresponden volúmenes igualmente ordenados.” (Puig Adam, 1980, p. 339, 340)

Analizando algunos libros de enseñanza media se observa que los que se editaron en la última década dan una breve idea de lo que es volumen para luego pasar a la medida del volumen y trabajar con el SMD.

Por ejemplo:

- “La medida del volumen: Todos los cuerpos que nos rodean ocupan un lugar en el espacio al que llamamos volumen. En muchas ocasiones tenemos que medir volumen y para ello necesitamos: * elegir una unidad de medida, *contar cuantas unidades de medida necesitamos para ocupar el espacio, * expresar la unidad de medida” y hace una breve introducción al cálculo de volumen con unidades arbitrarias para luego seguir con las unidades convencionales de volumen del SMD (Rodríguez,M. Martinez, M., 1998, p. 132)
- “Medidas de volumen. (...) Estos cuerpos tienen distintas formas, pero como están armados con el mismo número de cubitos iguales, tienen el mismo volumen. El volumen de cada uno de estos cuerpos es 10 cubitos”, expresa que dichos cuerpos son equivalentes en volumen y luego pasa al trabajo con el SMD (Larotonda, J y otros, 2005, p. 171)

Mientras que otros libros más antiguos hacen un tratamiento más extenso del tema.

Por ejemplo:

- En “Álgebra y Geometría del Espacio 2” (Gonzalez-Mancil, 1969, p.170) se define volumen de un sólido limitado por superficies, planas o no como un “número real no negativo que asigna a cada sólido de manera que:1º) si dos sólidos son iguales (congruentes) sus volúmenes sean iguales; 2º si el sólido se descompone en otros sólidos el volumen del sólido primitivo sea la suma de los volúmenes de las partes, y 3º tal que el volumen del cubo cuya asista sea la unidad de longitud sea la unidad de volumen” Luego define sólidos equivalentes, el postulado de Cavalieri y demuestra algunas propiedades de poliedros y cuerpos redondos referidos a la equivalencia entre cuerpos y al cálculo de su volumen.
- En “Matemática cuarto año” (Cabrera, E. Y Medici, H., 1967) se presenta la idea intuitiva de la equivalencia entre cuerpos, para concluir que “ si esos tres cuerpos hacen subir al líquido de la vasija hasta un mismo nivel diremos que ocupan el mismo espacio o también que son equivalentes o que tienen el mismo volumen” (p. 490) para luego presentar los postulados de equivalencia, el de Cavalieri, equivalencia entre algunos cuerpos y la medida del volumen de algunos de ellos (poliedros y redondos).

Es importante que el docente conozca distintas definiciones sobre el tema a tratar, esto lo ayudará a buscar situaciones didácticas que permitan a sus alumnos formar el objeto mental volumen; cuando decimos objeto mental nos referimos al sentido que le da Freudenthal (1983) cuando dice que los objetos mentales son todas las representaciones, ideas, relaciones, significados que el concepto evoca en la mente de la persona.

- ***La medida***

La medida de una magnitud es un proceso donde primero se debería trabajar la constitución de la magnitud, luego con la medida de la misma para seguir con su estimación. Según del Olmo (1993) el proceso se inicia con la percepción de la cualidad que se va a medir , en este caso el volumen. Luego se comparan objetos que tienen el mismo atributo (volumen) y por último se le asigna al volumen un número teniendo en cuenta los siguientes pasos:

a) se elige la unidad de medida

b) se repite la misma sobre el objeto a medir tantas veces como sea posible

c) se cuenta cuántas veces está contenida la unidad en el objeto considerado

d) se le asigna al objeto ese número

Lo que se pretende con este proceso es conseguir que quede claro qué es lo que se va a medir y la importancia de la elección de la unidad de medida.

Se profundiza el tratamiento de la medición con la estimación de la misma, es decir la probabilidad de suponer la medida del volumen de un objeto sin la ayuda de ningún instrumento.

"Cuando los objetos que se comparan están muy próximos desde el punto de vista de una magnitud determinada, no basta la comparación directa, hay que recurrir a la indirecta. Medir es, en realidad, realizar una comparación indirecta en la que se escoge de antemano el objeto que se usará como intermediario en la comparación para que sirva como referencia única para cualquier objeto que se tome" (Chamorro,1994, p 62).

Hay que tener en cuenta que la elección de la unidad de medida es arbitraria, que es importante que se practiquen cambios de unidades con anterioridad a la presentación de las unidades del SMD y que si se trabaja en forma manipulativa los alumnos pueden dar sentido a lo que realizan y así sentar las bases para el posterior trabajo con fórmulas numéricas.

- ***Las dificultades***

(A) Como hemos analizado brevemente, la mayoría de la bibliografía escolar hace un tratamiento prioritario del SMD dando por supuesto que se sabe lo que es la magnitud que ha de ser medida, en este caso el volumen. Si bien el SMD ofrece una gran ventaja no hay que perder de vista que "un uso prematuro de tal sistema lleve aparejada la incomprensión" (Chamorro, 1994,p. 43). Es importante tener en cuenta los conceptos previos que el alumno necesita para el trabajo con el SMD, ya que el mismo funciona por agrupamientos de potencias de diez y es necesario que el alumno maneje el sistema de numeración decimal entre otras cosas.

(B) Comúnmente volumen y capacidad se expresan como sinónimos, sin embargo ambos términos conllevan a diferentes significados. Volumen sugiere el espacio ocupado mientras que capacidad es el espacio vacío con posibilidad de ser llenado. La relación entre capacidad y volumen es complicada por ello debemos distinguir entre "capacidad como espacio creado (espacio vacío) y volumen como espacio reclamado (espacio ocupado)" (del Olmo, 1993, pp.98).

Por ejemplo si consideremos una botella de vidrio con jugo con un volumen de un decímetro cúbico, podemos pensar en:

- el espacio ocupado por la botella como si fuera un cuerpo compacto: su volumen total
- el espacio ocupado por el vidrio: volumen del recipiente
- o el espacio ocupado por el líquido: su capacidad

Según Kerslake (1976) (citado por Dickson, 1991) la palabra volumen puede utilizarse con dos significados:

Volumen interno de un hueco, que es sinónimo de capacidad.

Volumen externo como cantidad de espacio ocupado.

Destaca que en la vida cotidiana hacemos mayormente referencia al volumen/capacidad interno y al llenado total o parcial de cosas huecas y no al volumen como espacio ocupado. Además escolarmente se acentúa esta afirmación ya que las prácticas en el aula se limitan a llenar espacios huecos y hay una marcada carencia de actividades que apunten a la noción de volumen ocupado.

Kerslake (1976) cree que los alumnos encuentran más sencilla la noción de volumen interior: "¿cuánto contiene esta caja?" que la de volumen exterior: ¿cuánto espacio ocupa este objeto?" y destaca que por lo general se presentan los mismos esquemas o dibujos cuando se estudian los dos modelos de volumen, por lo tanto los alumnos no tienen "la oportunidad de distinguir claramente ambos tipos de volumen ni de considerar las diferentes consecuencias que comporta cada tipo de medida" (p.148)

Por otra parte resulta más fácil determinar el volumen/capacidad de un objeto irregular, una pava, por ejemplo, llenándola con agua y luego verterla en un vaso graduado; que estimar el volumen de un objeto sólido como puede ser una mesa o una persona.

Piaget e Inhelder (1974) (citado por Dickson, 1991) averiguaron que la noción de "volumen ocupado" se adquiere más tarde que la de "cantidad de materia" y que el "volumen desplazado" resulta más difícil de adquirir, entendiendo como volumen desplazado la idea de que el volumen de un objeto es equivalente al volumen del líquido que desplaza al ser sumergido en un recipiente con agua. Para muchos alumnos el volumen desalojado parecería depender del peso del objeto sumergido, de la profundidad o del tamaño, de ahí la importancia de proponer en el aula actividades que pongan de relieve estos aspectos.

Freudenthal (1983) expresa que el volumen está menos expuesto a un empobrecimiento fenomenológico que el concepto de área especialmente por su doble aspecto de capacidad y volumen; destacando que la relación entre capacidad y volumen es complicada. Sobre todo por el uso que se le da en la vida diaria, es bastante frecuente utilizar medidas de volumen para medir capacidades o contenidos, por ejemplo: la cantidad de agua de una piscina, la cantidad de gas que puede almacenar un depósito, la capacidad de un motor, etc.

(C) Se puede interpretar el volumen como una magnitud física *unidimensional,* se lo puede medir, estimar, comparar, sumar, etc. directamente, el cálculo consiste en el conteo de las unidades de volumen. O como una magnitud matemática *tridimensional* calculable como: A) producto de tres longitudes B) producto de una superficie por una longitud (Maza, 2005)

Según Vergnaud (1983) (citado por del Olmo, 1993) interpretar el volumen como una magnitud tridimensional corresponde a tratarlo como un modelo multiplicativo, lo que puede acarrear ciertas dificultades al haber trabajado anteriormente modelos aditivos (perímetro). Según este autor deben trabajarse coordinadamente los aspectos unidimensional y tridimensional, para lo cual son útiles las actividades de rellenado. Abordar estos temas, junto con la proporcionalidad hacen que el volumen sea un concepto poderoso y a la vez difícil de construir por los alumnos.

"El cambio de perspectiva entre procedimientos de cálculo de volumen en los que el proceso involucrado consiste en un conteo eficiente de unidades de la misma naturaleza de aquello que se pretende medir y otros procedimientos, en los cuales los cálculos involucran comparaciones entre unidades de distinta naturaleza a la que se está midiendo, como son longitudes y áreas en el caso del volumen, acarrea dificultades cognitivas en el proceso de aprendizaje" (Sáiz, M.,1999)

(D) Los objetos de la geometría, en este caso los cuerpos pertenecen a un espacio teórico conceptualizado y los dibujos que realizan nuestros alumnos son una representación de esos objetos teóricos. Muchas veces los alumnos al mirar o dibujar una figura no analizan su concepto ni sus propiedades sino que se dejan llevar por lo que ven. Fischbein (1993) se refiere a estas tensiones que se originan en el tratamiento de las figuras geométricas, analizando que las mismas poseen simultáneamente características conceptuales y figurales, lo que denomina conceptos figurales. Y los errores que a veces se dan en los razonamientos pueden tener su origen en la separación entre el aspecto conceptual y figural de estos conceptos figurales. "La tendencia a rechazar la definición bajo la presión de limitaciones figurales, representa un obstáculo principal en el razonamiento geométrico" (p.13).Desde el planteamiento de distintas actividades áulicas se debería trabajar este doble aspecto, ya que generalmente no es un proceso que se da naturalmente. Tampoco dominan la visualización espacial, que es la que permite manipular mentalmente figuras rígidas. Esta habilidad se puede desenvolver mediante la representación secuenciada de objetos de tres dimensiones en dibujos de dos y la construcción de objetos tridimensionales a partir de su representación bidimensional.

(E) Sabemos que podemos llegar a las fórmulas para el cálculo del área de las distintas figuras planas utilizando las transformaciones de romper y rehacer (Freudenthal 1983) que convierten la figura en un rectángulo equivalente. Si conocemos la fórmula del cálculo del área del rectángulo, podemos obtener por equidescomponibilidad (procedimiento de dividir una figura poligonal en un número finito de partes y volver a formar otra) la del triángulo y luego calcular el área de cualquier figura plana poligonal, ya que las mismas se pueden dividir en triángulos.

No ocurre lo mismo en el caso del volumen. Hilbert (1900) (citado por Sáiz,M. [en línea]) observó que el método de equidescomponibilidad no siempre se puede aplicar en tres dimensiones. Son casi únicamente los prismas los cuerpos que pueden transformarse en paralelepípedos equivalentes mediante transformaciones de romper y rehacer. Esto nos muestra que si bien el volumen y el área comparten propiedades comunes, en este caso la cualidad de los objetos que pueden medirse también poseen otras que lo identifican de manera independiente y por lo tanto el volumen no puede estudiarse como una extensión del área.

(F) Tanto la construcción del concepto de área como de volumen son procesos complejos que no se adquiere inmediatamente sino en forma gradual. Se debe construir el concepto de unidad entre otras cosas y hacer uso de la iteración de la misma para asignar un número al objeto que se mide. Y la dificultad radica fundamentalmente que ese número generalmente no es natural y se confunde la medida entera con la medida exacta. Hay que trabajar en la medición con las aproximaciones y los encuadramientos para evitar de este modo que los alumnos crean que las medidas son enteras, además de analizar que tanto el encuadramiento como la aproximación a aplicar en una medida dependen del tipo de medida y del uso de la misma. Otro dificultad que se suele presentar está relacionada con la proporcionalidad inversa que existe entre el tamaño de la unidad de medida y el resultado de la medición; cuesta comprender que si cambiamos la unidad de medida por otra menor, por ejemplo, la medida del mismo objeto con respecto a esta nueva unidad será mayor. De ahí la necesidad de reflexionar cada vez que medimos sobre la relación entre el tamaño de la unidad y la medida que se obtiene.

Conclusiones

Para el estudio del volumen y su medida debe realizarse un estudio completo de la cualidad que permita aislarla , comparar objetos, usar diferentes unidades de medida , establecer la necesidad de una en particular, estimar la medida del volumen de un objeto, ...o sea se deben poder proponer actividades variadas y con diferentes materiales que pongan de manifiesto los aspectos mas importantes del concepto de volumen y se eliminen aquellos que entorpecen la comprensión.

Sólo manipulando es posible distinguir las distintas propiedades de los objetos; es difícil comprender usando sólo el sentido de la vista que un objeto pesa más que otro, ó que un recipiente tiene más o menos capacidad que otro sin recurrir al trasvasado de líquido. La actividad de empaquetar es importante para la construcción del concepto de volumen, también lo son las de llenar y vaciar recipientes con distintos materiales. Es necesario que el alumno realice este tipo de actividades y no se quede sólo con la observación de un dibujo o con su relato. Además se le debe permitir que descubra y aprenda de sus errores, fomentar las discusiones en grupo confrontando ideas, plantear situaciones problemáticas relacionadas con la vida diaria, usar y fomentar el sentido común.

Freudenthal (1983) considera que se debe comenzar el tratamiento de un concepto matemático, en este caso el del volumen, a través de un análisis fenomenológico y expresa que para lograr que los alumnos se formen el objeto mental volumen es necesario trabajar las siguientes actividades:

- Realizar transformaciones con sólidos como modelar, verter, transformaciones de romper y rehacer, sumergir en líquidos, etc. A través de las actividades diferenciar volumen y área y volumen y capacidad.
- Realizar repartos equitativos de líquidos, masa, plastilina, etc. aprovechando la regularidad de ciertos cuerpos; estimando y midiendo.
- Comparar y reproducir sólidos, ya sea comparando bases y alturas, o por estimación, o por medición, o usando transformaciones que conserven el volumen. Se consideran también situaciones en las que hay que comparar dos volúmenes pero también aquellas en las que se debe realizar una reproducción de un volumen con una forma diferente.
- Medir, ya sea por exhausción con una unidad y afinando la medición con subunidades, o por acotación entre un nivel superior e inferior ,o por transformaciones de romper y rehacer, proceso por el que generalmente se deducen las fórmulas de las figuras geométricas; o por inmersión, o por medio de relaciones geométricas generales midiendo las dimensiones lineales y aplicando fórmulas para obtener la medida.
- Realizar construcciones: cuerpos de igual área y distinto volumen, cuerpos de igual volumen y diferentes áreas, etc.

Lo importante es que haya variedad de actividades para que la comprensión del concepto de volumen sea la adecuada..

Referencia Bibliográficas:

- Cabrera, E. Y Medici, H. “Matemática Cuarto Año”. Crespillo. Buenos Aires.
- Castelnuovo, E. (1963) “Geometría Intuitiva” Segunda parte. Labor. Bs. As.
- Chamorro, C. Y Belmonte,J.(1994) “ El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales” Madrid. Síntesis
- Del Olmo, M.A., Moreno,M.F. y Gil, F. (1993) “Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?” Ed. Síntesis Madrid.
- Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O.; (1991). “El aprendizaje de las matemáticas”. Barcelona. Labor
- Ferraris, Cristina (1991) “Espacio” Universidad Nacional del Comahue.
- Fischbein, E. (1993): "The theory of figural concepts" en Educational Studies in Mathematics, 24. 139 - 162.(Traducción al español por Victor Larios Osorio, CICB, UAQ, México, 2002, 1 - 18)
- Freudenthal, H. (1983). “Didactical phenomenology of mathematical structures”. Reidel Publishing Company. Boston.

- Gonzalez,M. Y Mancil, J. (1969) “Álgebra y Geometría del Espacio”. Kapeluz. Buenos Aires.
- Larotonda, J; Wykowski, A. y Ferrarini, G. (2005) “Matemática 7”. Kapeluz. Buenos Aires.
- Maza, Ma Elena (2005) “El problema didáctico del aprendizaje del volumen”. Tesis de Maestría en Didácticas Específicas. FHUC. UNL
- Puig Adam, Pedro (1980) “Curso de Geometría Métrica” Tomo I. Decimoquinta edición. Gomez Puig Ediciones. Madrid
- Rodríguez,M. Martinez, M. (1998). “Matemática 82. McGRAW-HILL. Chile
- Saíz Roldan, Mariana. El volumen ¿por dónde empezar? En HYPERLINK http://www.matedu.cinvestav.mx [en linea mayo2007]
- Sanchez-Marmol, L. y Perez-Beato, M (1947) “Geometría Métrica, Proyectiva y Sistemas de Representación” Tomo II. Segunda edición. S.A.E.T.A. Madrid